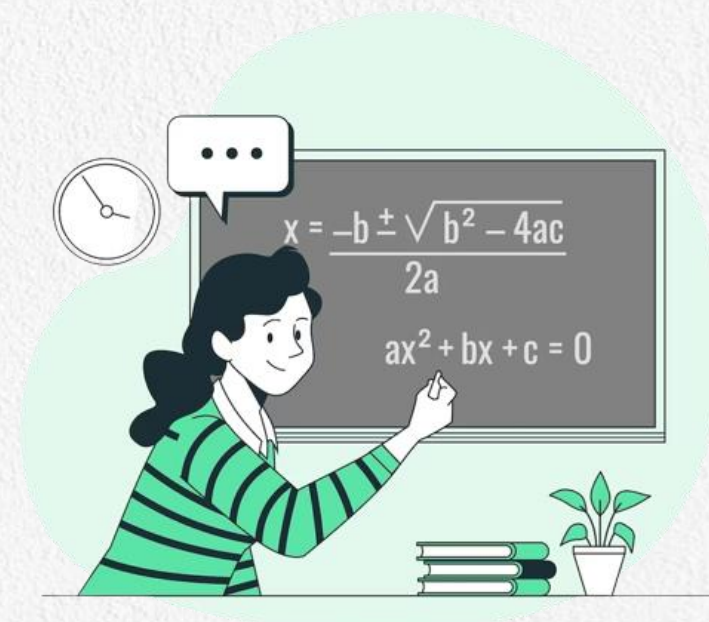


LOS NUMEROS COMPLEJOS

FGC-105-MATEMATICA BASICA I



LOS NUMEROS COMPLEJOS

- La ecuación $x^2+1=0$ carece de soluciones en el campo de los números reales.
- $\log_e(-2)$ no es un número real.
- Tampoco es un número real $(-2)^\pi$



LOS NUMEROS COMPLEJOS



- Un número complejo α viene dado por un par ordenado (a, b) de números reales. El primero se llama parte real, y se escribe:

$$a = \text{Re}(\alpha)$$

- El segundo se llama parte imaginaria, y se escribe:

$$b = \text{Im}(\alpha)$$

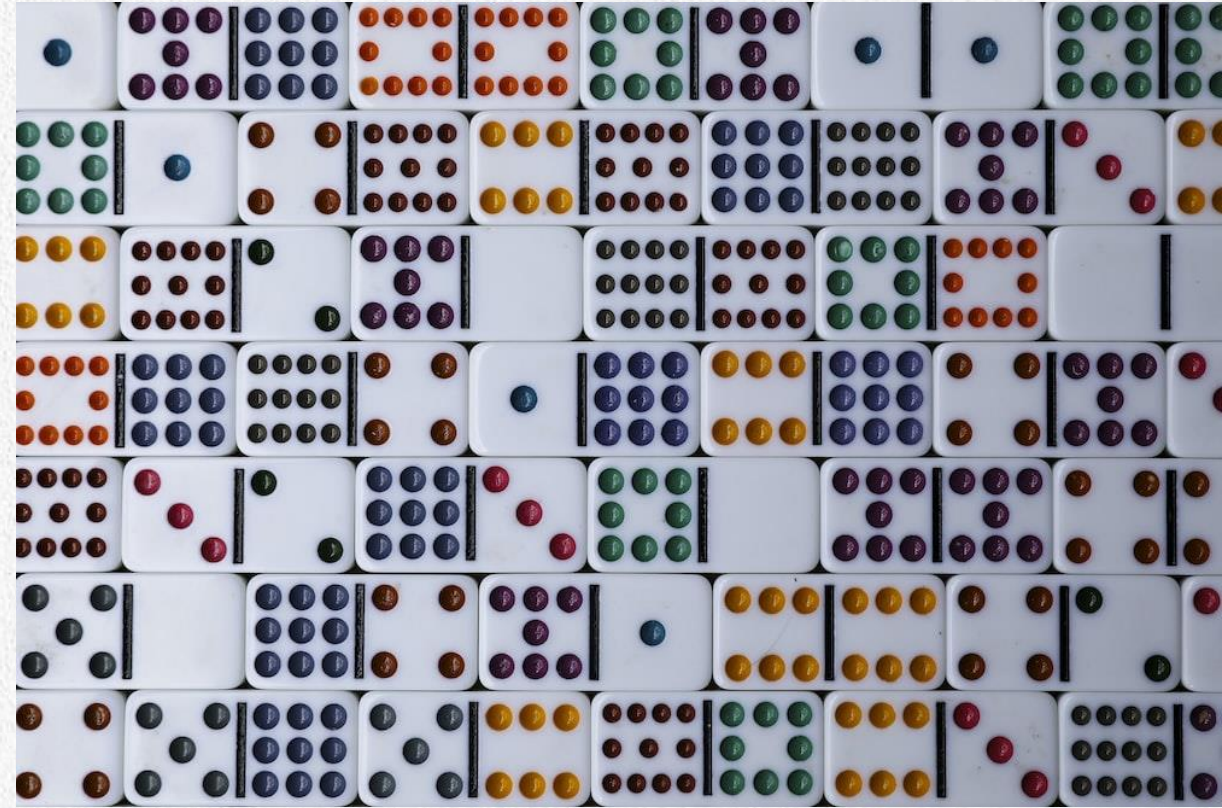
LOS NUMEROS COMPLEJOS



- Se puede establecer una **correspondencia biunívoca** entre el conjunto $C=R^2$ de los números complejos y el conjunto E^2 de puntos del plano, habiendo fijado un sistema de referencia cartesiano.
- De modo que el complejo $\alpha=(a,b)$ representa el punto P (llamado *afijo*), cuyas *coordenadas* son precisamente a y b.

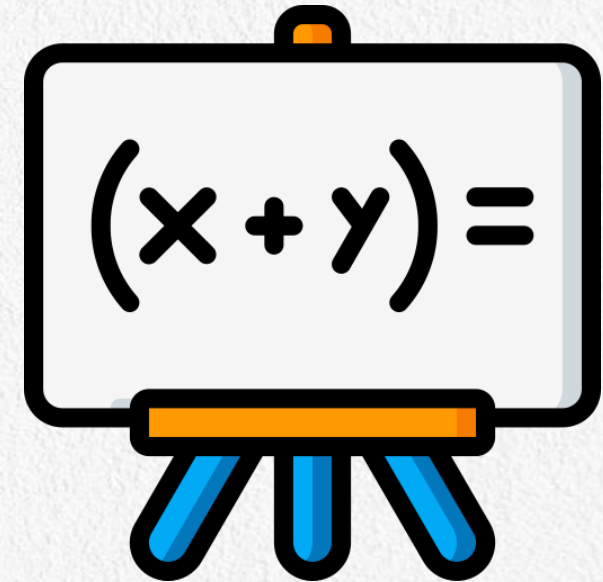
LOS NUMEROS COMPLEJOS

- El complejo $(0,1)$ se representa mediante la letra i y es *la unidad imaginaria*.
- Los *números reales* son los números complejos de la forma $(a,0)$, donde a es el número real que se identifica con el complejo $(a,0)$. Los *números imaginarios* son de la forma (a,b) , con b distinto de cero.



LOS NUMEROS COMPLEJOS

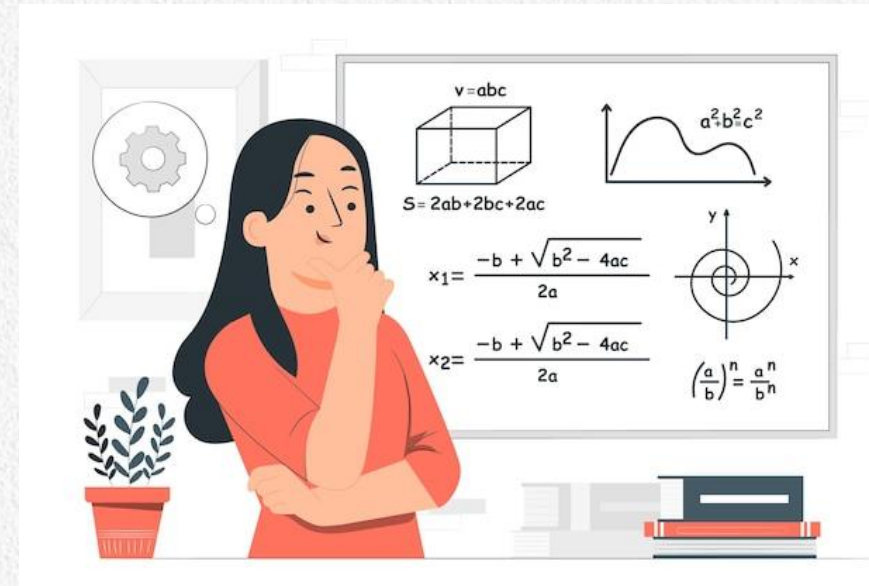
- Los números reales forman el conjunto $\mathbb{R}$ al que le corresponde el eje de abscisas. Los **números imaginarios puros** se corresponden con los puntos del eje de ordenadas.
- El *módulo* del complejo $\alpha=(a,b)$ viene dado por r y el *argumento* por el valor de θ tal que $\tan \theta = b/a$. Nótese que si θ es un argumento también lo es $\theta+2k\pi$



LOS NUMEROS COMPLEJOS

- El argumento se llama *principal* si $-\pi < \theta \leq \pi$
- La representación *módulo argumental* del complejo $a=(a,b)$ viene dada por $\rho\theta$
- La *identidad* entre los complejos (a,b) y (c,d) equivale a: $a=c$ y $b=d$
- La *identidad* entre los complejos $\rho\theta$ y $\sigma\zeta$ equivale a:

$$a = \sigma \text{ y } \theta = \zeta + 2k\pi$$



LOS NUMEROS COMPLEJOS

- El paso del par ordenado a la forma módulo argumental se logra del siguiente modo:

$$\left. \begin{aligned} &\bullet \alpha = (a,b) = \rho\theta \\ &\bullet a = \rho \cos\theta \\ &\bullet b = \rho \sin\theta \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\rho = \sqrt{a^2 + b^2} \\ &\theta = \arctg(b/a) \\ &\text{Signo}(\theta) = \text{signo}(b) \\ &-\pi < \theta \leq \pi \end{aligned}$$



LOS NUMEROS COMPLEJOS

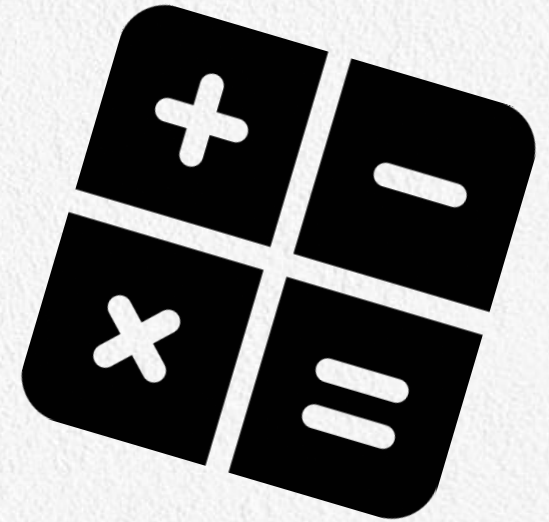
La aritmética compleja viene dada por:

$$(a,b) + (c,d) = (a + c, b+ d)$$

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Se demuestra fácilmente que:

- $\rho\theta\sigma\zeta=(\rho\sigma)\theta+\zeta$



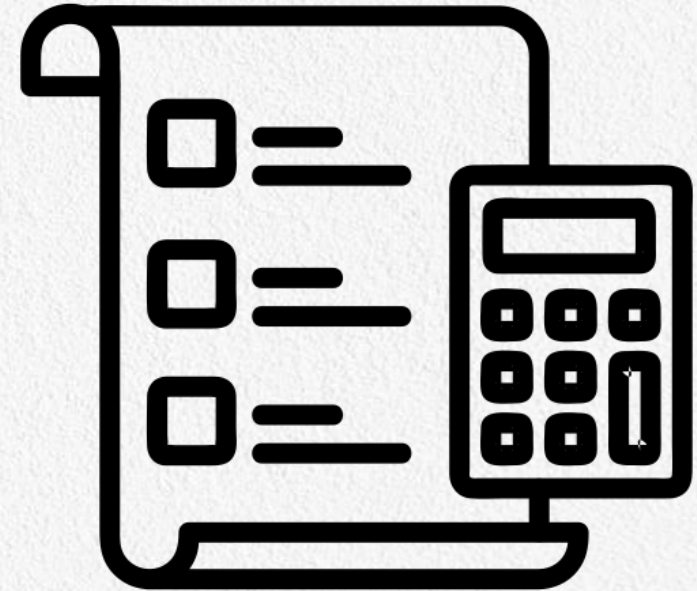
LOS NUMEROS COMPLEJOS

- El *opuesto* de (a,b) es $-(a,b)=(-a,-b)$
- El *inverso* de $a=(a,b)$, distinto de cero $(0,0)$, Es:

$$a^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2} \right)$$

- También se tiene que para $\rho \neq 0$ distinto de Cero

$$(\rho\theta)^{-1} = (\rho)^{-1} - \theta$$



LOS NUMEROS COMPLEJOS

- La *forma binómica* del complejo (a,b) se escribe $a+ib$, ya que
- $(a,b) = (a,0) + (0,b) = (a,0) + (0,1) * (b,0) \text{ ®}$
- $(a,b) = a + ib$
- La *forma trigonométrica* del complejo $\rho\theta$
- viene dada por $\rho(\cos \theta + i\sin\theta)$, puesto que:

$$\rho_{\theta} = (a, b) = a + ib = (\rho\cos\theta) + i(\rho\sin\theta) = (\rho\cos\theta + i\rho\sin\theta)$$



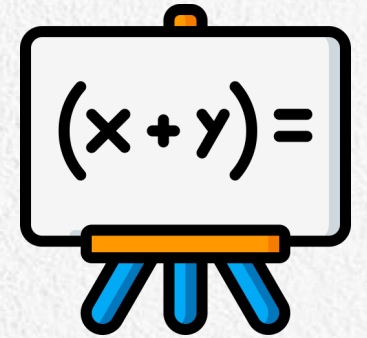
LOS NUMEROS COMPLEJOS

- La *forma exponencial* del complejo $\rho\theta$ viene dada por:

$$\rho_{\theta} = \rho^{e^{i\theta}}$$

- teniendo en cuenta la fórmula de Euler de la exponencial compleja:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$



LOS NUMEROS COMPLEJOS

- Nótese que $i^2 = -1$ y que la ecuación $x^2 + 1 = 0$ tiene como soluciones imaginarias i y $-i$.
- De otra parte: $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$ etc
- Además, si n es un número natural se tiene:

$$\begin{aligned}(\rho_\theta)^n &= (\rho)^n_{(n\theta)} \text{ ®} \\ (\rho(\cos \theta + i \sin \theta))^n &= \rho^n(\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)) \text{ ®} \\ &= (\cos \theta + i \sin \theta)^n \\ &\text{(Fórmula de De Moivre)}\end{aligned}$$

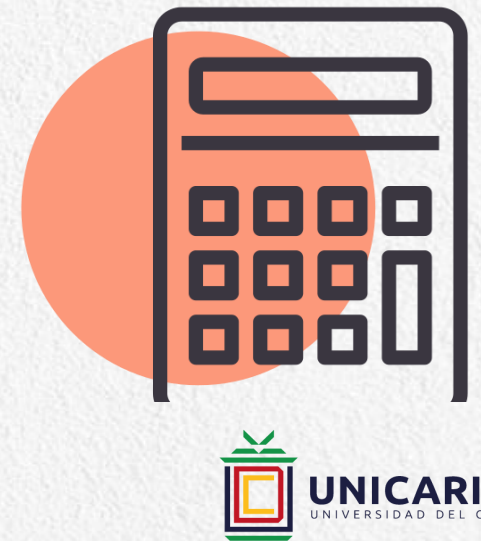
LOS NUMEROS COMPLEJOS

- Las expresiones anteriores son válidas para n negativo.

Además:

$$\alpha^{m/n} = (\alpha^{1/n})^m$$

de donde basta definir $\alpha^{1/n}$ para poder evaluar la expresión $\alpha^{m/n}$ con m y n enteros, n positivo.



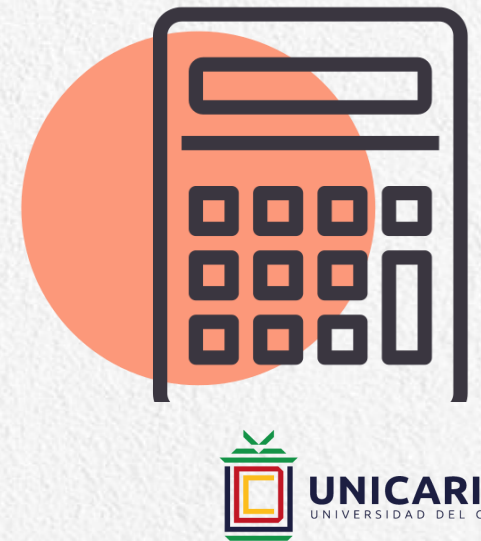
LOS NUMEROS COMPLEJOS

- La expresión $\alpha^{1/n}$ en realidad corresponde a n números complejos diferentes dados por:

$$\sigma \zeta = (\rho^{1/n}) \frac{\theta + 2k\pi}{n}$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

- Los afijos de $\sigma \zeta$ son los vértices de un polígono regular de n lados, centrado en el origen de coordenadas.



LOS NUMEROS COMPLEJOS

- Se justifica lo anterior como sigue:

$$\begin{aligned} & \bullet (\sigma \zeta)^n = \rho_\theta \text{ ®} \\ & \bullet \sigma = \rho, n \zeta = \theta + 2 \kappa \pi \text{ ®} \\ & \bullet \sigma = \rho^{1/n}, \zeta = (\theta + 2 \kappa \pi) / n \end{aligned}$$

- Para los demás valores de k se repiten las soluciones cíclicamente

LOS NUMEROS COMPLEJOS

- La exponencial compleja se define muy fácilmente: Sea $\alpha = (a, b)$, entonces

$$e^{\alpha} = e^{a+ib} = e^a(e^{ib}) = e^a(\cos b + i \sin b)$$

Nótese que:

$$e^{\alpha} e^{\beta} = e^{\alpha+\beta}$$

$$e^0 = 1$$

LOS NUMEROS COMPLEJOS

- El logaritmo de un número complejo en realidad son infinitos complejos. En concreto:

- $\ln(\rho_\theta) = \ln \rho + i(q + 2k\pi),$
- $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

LOS NUMEROS COMPLEJOS

- La justificación de lo anterior es como sigue:

$$\text{sea: } \rho_{\theta} = \rho (\cos \theta + i \sin \theta) \\ e^{\lambda} = \rho_{\theta} \Leftrightarrow \lambda = \ln(\rho_{\theta})$$

Si $\lambda = u + iv$ tiene:

$$e^{\lambda} = e^{u+iv} = e^u e^{iv} = e^u (\cos v + i \sin v)$$

$$e^u = \rho(\cos \theta + i \sin \theta), \text{ luego}$$

$$e^u = \rho, \text{ o bien, } u = \ln \rho \text{ y}$$

$$v = \theta + 2k\pi, \text{ en definitiva:}$$

$$\lambda = \ln(\rho_{\theta}) = u + iv = \ln \rho + i(\theta + 2k\pi)$$



LOS NUMEROS COMPLEJOS

- Para $k=0$ se obtiene el *valor principal* del logaritmo, con $-\pi < \theta \leq \pi$

- $\text{Ln}(\rho_\theta) = \ln \rho + i \theta$

- Nótese que: $e^{\text{Ln}(\rho_\theta)} = \rho_\theta$

- Se define μ^λ mediante
$$e^{\lambda \ln \mu}$$

LOS NUMEROS COMPLEJOS



• Ejemplos:

1) $\log_e(-2)$

$$\log_e(-2) = \ln(2_\pi) = \ln 2 + i(\pi + 2k\pi) = \ln 2 + i(1 + 2k)\pi \quad \text{®} \quad \ln(-2) = \ln 2 + i\pi$$

2) $(-2)^\pi$

$$(-2)^\pi = (2_\pi)^\pi = e^{\pi \ln(2_\pi)} = e^{\pi(\ln 2 + i(1+2k)\pi)} = e^{\pi \ln 2} e^{i(1+2k)\pi^2} = e^{\pi \ln 2} (\cos(1+2k)\pi^2 + i \sin(1+2k)\pi^2)$$

LOS NUMEROS COMPLEJOS



Ejemplos:

- – En el caso anterior si $k=0$ se obtiene el valor principal del resultado (con redondeo a cuatro cifras decimales):

$$(-2)^p = e^{\pi \ln 2} (\cos \pi^2 + i \sin \pi^2) = -7,9662 - i3,7974$$

3)iⁱ

$$i^i = e^{i \ln i} = e^{i \ln \left(1_{\pi/2}\right)} =$$

$$e^{i(\ln 1 + i(\pi/2 + 2k\pi))} = e^{-(\pi/2 + 2k\pi)}$$



LOS NUMEROS COMPLEJOS



Ejemplos:

- – En el caso anterior si $k=0$ se obtiene el valor principal del resultado (con redondeo a cuatro cifras decimales):

- $i^i = e^{-\pi/2} = 0,2079$

- – 4) Hállese las fórmulas del coseno y seno del ángulo doble.



LOS NUMEROS COMPLEJOS



Se tiene que:

$$(\cos\theta + i \sin \theta)^2 = (\cos 2\theta + i \sin 2\theta) \text{ ®}$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$\sin 2\theta = 2 \sin\theta \cos\theta$$